

CHƯƠNG

I

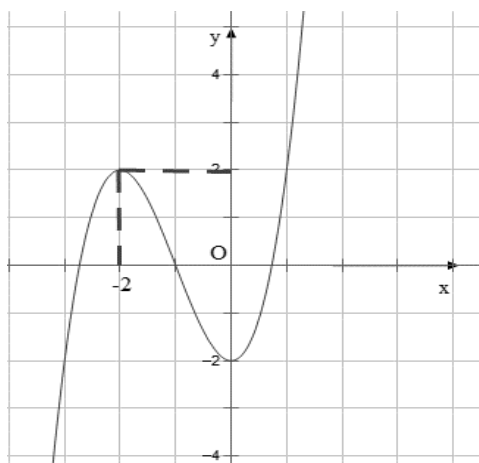
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ là

Lời giải

ĐS: 3

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'			
y	2		$+\infty$
	$\searrow$		$\searrow$
	$-\infty$		-2

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Lời giải

ĐS: 4

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy: phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$.

Khi đó: $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \rightarrow x_1^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \rightarrow x_2^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

Lời giải

ĐS: 2

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

TH 1: Nếu $m = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$$\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy khi $m \in \{-2; -1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

Lời giải

ĐS: 4

Đặt $h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

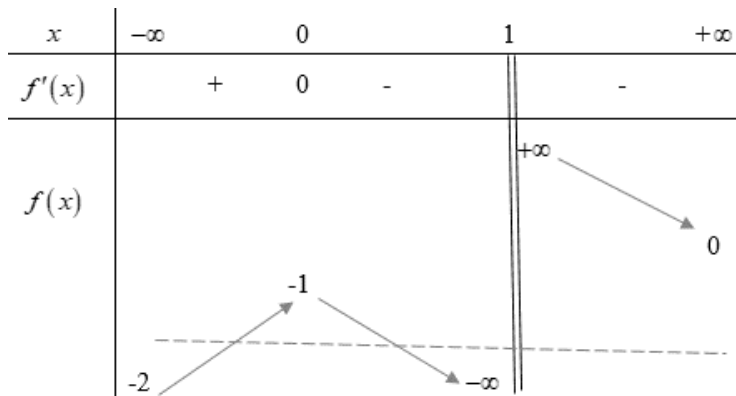
Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $y = g(x) = \frac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

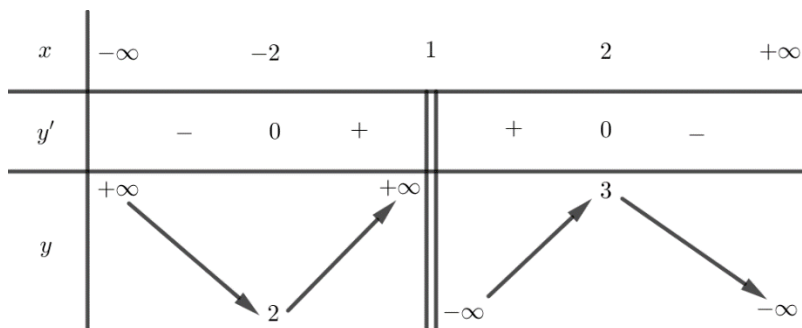
Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.



Từ bảng biến thiên có phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty; 0), x_2 \in (0; 1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

ĐS: 4

Ta có: $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}(1)$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 1$

và giới hạn của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ tại các điểm x_1, x_2, x_3, x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{2f(x)-5} = 0$ nên $x=1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

Lời giải

ĐS: 3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình

$$2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}.$$

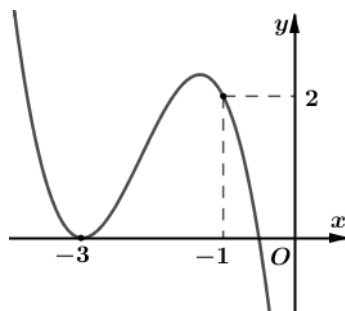
Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$.

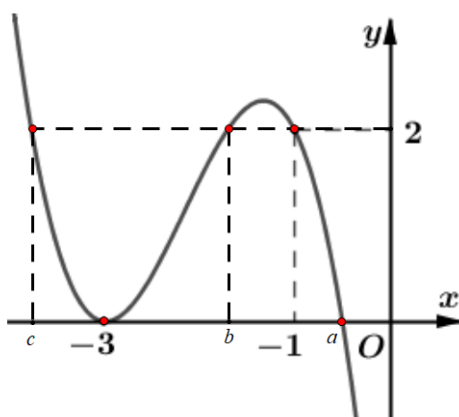
Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

Câu 8: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

ĐS: 4



$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]}$$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2 + x}$: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

$$\text{Xét phương trình } x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Với $x = 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty$. Suy ra $x = 0$ là

tiệm cận đứng.

Với $f(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ hoặc $x = a$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = -\infty$ nên $x = -3$ là tiệm cận đứng.

$$\text{Với } f(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = b \ (-3 < b < -1) \\ x = c \ (c < -3) \end{cases} \text{ Ta có:}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = 0 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = 0 \end{cases} \quad \text{nên } x = -1 \text{ không là tiệm}$$

cận đứng.

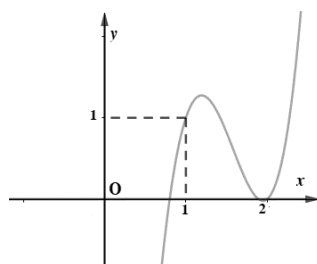
$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = +\infty \text{ nên } x = b \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = +\infty \text{ nên } x = c \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]} \text{ có bao nhiêu tiệm cận đứng?}$$



Lời giải

ĐS: 3

Nhận xét 1: Với $x_0 \geq 1$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét 2: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x) = a(x - x_1)(x - 2)^2$.

$$\text{Ta có } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, 0 < x_1 < 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

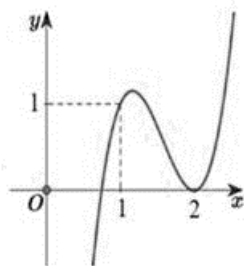
$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2, 1 < x_2 < 2 \\ x = x_3, x_3 > 2 \end{cases} \text{ suy ra } f(x) - 1 = a(x - 1)(x - x_2)(x - x_3).$$

$$\text{Khi đó ta có } g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x)[f(x)-1]}.$$

$$g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot a(x-x_1)(x-2)^2 \cdot a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}.$$

$x=0, x=x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ không thỏa mãn điều kiện $x_0 \geq 1$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x=2, x=x_2, x=x_3$.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



$$\text{Hỏi đồ thị hàm số } g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]} \text{ có bao nhiêu tiệm cận đứng?}$$

Lời giải

ĐS: 3

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)f(x)[f(x)-1]}$$

$$\text{Đkxđ: } \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có:

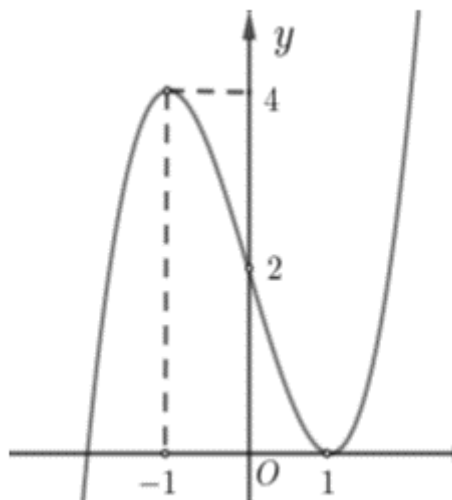
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=x_1 \end{cases} \text{ với } x=2 \text{ là nghiệm kép, } x_1 \in (0;1).$$

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{cases} \text{ với } x_2 \in (1;2); x_3 > 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } g(x) &= \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 TCD $x = 2; x = x_2; x = x_3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



Lời giải

ĐS: 4

Ta xét phương trình $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_1 < -1 \\ x = 0 \\ x = x_2 > 1 \\ x = x_3 < -1, x_3 \neq x_1 \end{cases}$. Khi đó

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}; (a \neq 0).$$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

Lời giải

ĐS: 2

Tính tiệm cận ngang.

$$\text{Ta có } x^3 + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$$

$$x^3 + x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Tính tiệm cận đứng.

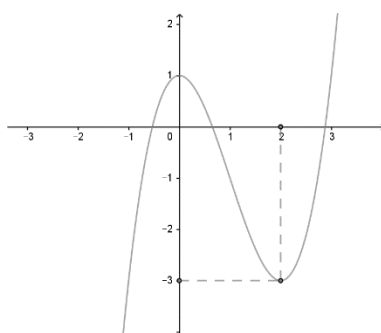
Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3 + x) + 3 = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x^3 + x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + x) = -3 \Leftrightarrow x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$

Vì hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ có 1 tiệm cận đứng.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

Lời giải

ĐS: 3

Ta có $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 0$, $x = 2$. Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(2) = -3 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$\text{Khi đó } y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)(x^3 - 3x^2 + 1)(x^3 - 3x^2)} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)}.$$

$$\text{Ta có } x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = x_1 \in (-1; 0) \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 \in (2; 3) \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} \text{ có tập xác định } D = (-\infty; 2] \setminus \{0; x_1; x_2\}.$$

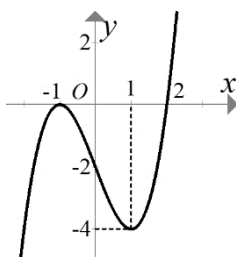
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = -\infty.$$

Suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)} = +\infty.$$

Suy ra $x = x_1$ và $x = x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây.



$$\text{Hỏi đồ thị hàm số } g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2 - 4x + 3)} \text{ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?}$$

Lời giải

ĐS: 1

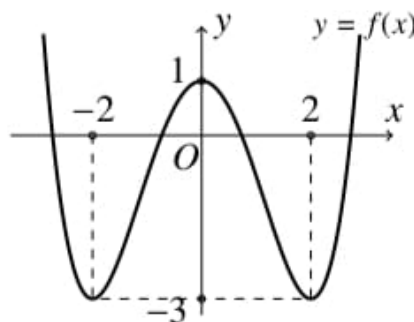
$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2 - 4x + 3)} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2 - 4x + 3)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có một đường tiệm cận đứng là: $x = 3$.

Câu 15: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{f(x)^2 + 2f(x) - 3}$$
 có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



Lời giải

ĐS: 4

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{f(x)^2 + 2f(x) - 3} = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{f(x)^2 + 2f(x) - 3}$$

Ta có: $f(x)^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m(m < -2) \\ x = 0 \\ x = n(n > 2) \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x = 0; x = \pm 2$ là các nghiệm kép và đa thức

$$f(x)^2 + 2f(x) - 3 \text{ có bậc là } 8 \text{ nên } y = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$$

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x = 0; x = 2; x = m; x = n$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x-4}{x^3-2mx^2+(m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc

đoạn $[-2023; 2023]$ để đồ thị hàm số có đúng 4 đường tiệm cận?

Lời giải

ĐS: 4041

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 4.

$$\text{Mặt khác } g(x) = (x-m)(x^2 - mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ h(x) = x^2 - mx + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} h(4) \neq 0 \\ m \neq 4 \\ h(m) \neq 0 \\ \Delta_h = m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{17}{4} \\ m \neq 4 \\ \begin{cases} m > 2 \\ m < -2. \end{cases} \end{cases}$$

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ nên có 4041 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17: Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

ĐS: 2011

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + x - m \neq 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang

Suy ra, đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 tiệm cận $\Leftrightarrow x^2 + x - m = 0$ có đúng 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3.

$$\text{Xét } \Leftrightarrow x^2 + x = m$$

$$h(x) = x^2 + x; h'(x) = 2x + 1$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$		$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Từ BBT suy ra

$$\Leftrightarrow m \geq 12$$

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in [-2022; 2022]$ nên $m \in \{12; \dots; 2022\}$

Vậy số giá trị nguyên thỏa ycbt là: $2022 - 12 + 1 = 2011$.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1) \cdot \sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

Lời giải

ĐS: 19

$$\text{Đk: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}.$$

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

$$\text{Xét phương trình } x^2 + (m+1)x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-m-2 \end{cases}.$$

Vì $x=1$ là nghiệm của tử số nên đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có một tiệm cận đứng nữa là $x=-m-2$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} -m-2 \geq 0 \\ -m-2 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}.$$

Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{-10; -9; -8; \dots; -2; 1; 2; \dots; 10\}$

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và đạt cực tiểu tại $x=-2$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{f(x)-f(1)}}$

Lời giải

ĐS: 1

Điều kiện: $x \geq 0$.

Vì hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và đạt cực tiểu tại $x=-2$ nên hệ số $a < 0$.

Xét $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) - f(1) \rightarrow -\infty$. Do đó hàm số đề bài không có tiệm cận ngang.

$$\text{Xét } f(x) - f(1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=a < -2 \notin [0; +\infty) \\ x=b > 3 \end{cases}.$$

Khi $\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{0}{0}$: không xác định.

$\lim_{x \rightarrow b} y = +\infty$: đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=b > 3$.

Vậy đồ thị hàm số đề bài có duy nhất 1 tiệm cận đứng.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x^2-mx+2}$ có hai đường tiệm cận đứng?

Lời giải

ĐS: 1

Ta có $-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}{x^2 - mx + 2}$ có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 3]$.

$$x^2 - mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 2}{x} = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	1	$\sqrt{2}$	3
f'	-	0	+
f	3	$2\sqrt{2}$	$\frac{11}{3}$

Vậy $2\sqrt{2} < m \leq 3$.

Câu 21: Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-1000; 1000]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + 2x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

ĐS: 908

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 2x \neq m \end{cases}$$

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + 2x - m} = 0, \forall m.$$

$\Rightarrow y = 0$ là pt đường tiệm cận ngang.

Cần tìm điều kiện để hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x$.

$$f'(x) = 2x + 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 3

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m < 3$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m \geq 3$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Kết hợp đề bài, để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $\begin{cases} m \in [3; 1000] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy có 908 giá trị nguyên của m .

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+m}}$ có hai đường tiệm cận đứng?

Lời giải

ĐS: 2021

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+m}}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2 - 2x + m = 0$

có hai nghiệm phân biệt và khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 - 2(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases}$.

Mà m nguyên và $m \in [-2021; 2021]$ nên suy ra $m \in \{-2021; -2020; \dots; -3; -2; -1; 0\} \setminus \{-8\}$.

Vậy có 2021 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$	10

$\searrow$ $\swarrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$
 -3 $-\infty$

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$.

Lời giải

ĐS: 4

Đặt $g(x) = \frac{1}{2f(x)+6}$, ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2; a\}$, trong đó $f(a) = -3$ và $a \in (2; +\infty)$. Khi đó ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 6} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 6} = \frac{1}{26} \text{ nên } y = 0 \text{ và } y = \frac{1}{26} \text{ là hai}$$

đường tiệm cận ngang.

Mặt khác ta có

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) + 6} = +\infty \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng;}$$

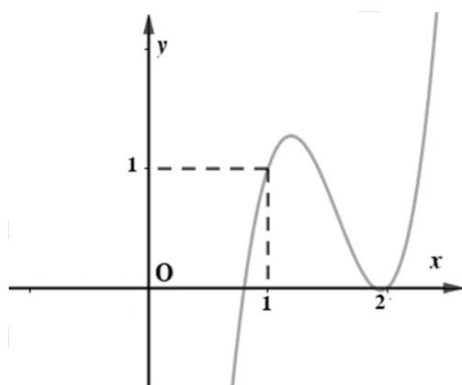
$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) + 6} = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ không là tiệm cận đứng;}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + 6} = +\infty \Rightarrow x = a \text{ là tiệm cận đứng;}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$ có 4 đường tiệm cận.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x^3 - 3x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Từ đồ thị ta thấy } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a \ (1 < a < 2) \\ x = b \ (b > 2) \end{cases}$$

$$\text{Xét } f(x^3 - 3x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 1 & (1) \\ x^3 - 3x = a \ (1 < a < 2) & (2) \\ x^3 - 3x = b \ (b > 2) & (3) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ như sau.

Từ BBT suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt, phương trình có 3 nghiệm phân biệt, phương trình có 1 nghiệm và 7 nghiệm này đều phân biệt. Vậy đồ thị hàm số đã cho có 7 tiệm cận đứng.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 2$	$\nearrow +\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

ĐS: 4

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2f(x)-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2f(x)-5} = 0$ nên đường thẳng $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

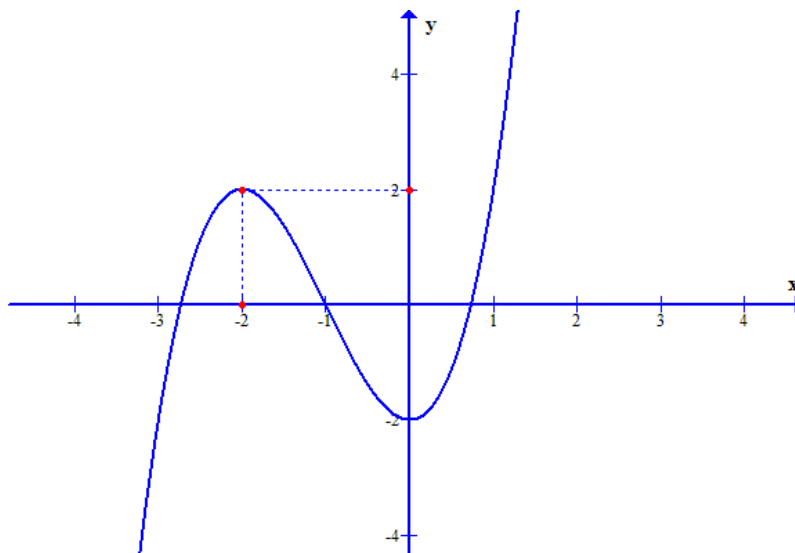
$$\text{Ta có } 2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a < -2) \\ x = b \ (-2 < b < 1) \\ x = c \ (1 < c < 2) \\ x = d \ (d > 2) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{2f(x)-5} = -\infty; \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{2f(x)-5} = +\infty \Rightarrow \text{đường thẳng } x = a \text{ là một tiệm cận đứng.}$$

Xét tương tự ta có các đường thẳng $x = b; x = c; x = d$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+1}{f(x)-m}$ có đúng 3 đường tiệm cận. Số phần tử của A là

Lời giải

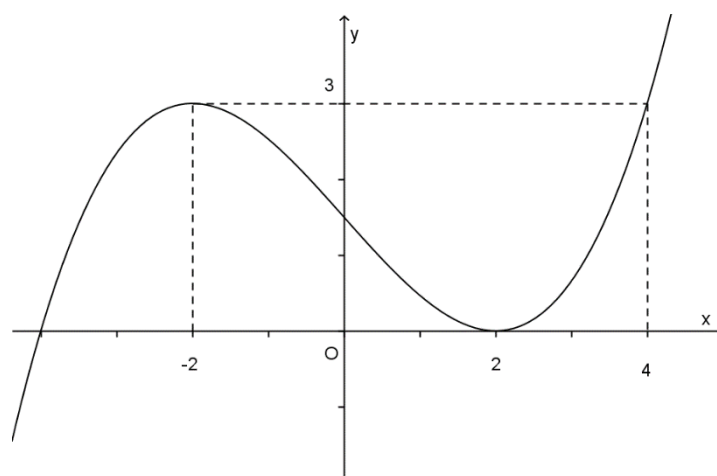
ĐS: 3

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{f(x)-m} = 0 \Rightarrow$ hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Để hàm số có đúng 3 tiệm cận $\Leftrightarrow g(x)$ có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 hoặc có ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{có 3 giá trị của } m.$$

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$:

Lời giải

ĐS: 4

$$\text{Xét phương trình: } f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{cases}$$

Giới hạn bên phải, bên trái của hàm số $g(x)$ tại các điểm $x=\pm\sqrt{6}$; $x=0$ bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4-x^2) = -\infty \text{ nên } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(4-x^2)-3] = \pm\infty$$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là 4.

Câu 28: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	1	$+\infty$

$$\text{Đồ thị hàm số } g(x) = \frac{(x^2-4)(x-2)}{f(x)-1} \text{ có mấy đường tiệm cận?}$$

Lời giải

ĐS: 2

$$\text{Xét phương trình } f(x)-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(b2) \\ x=-2(b2) \end{cases}.$$

Do $f(x)$ là hàm số bậc bốn có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên $f(x)-1 = a(x+2)^2(x-2)^2$ ($a < 0$).

$$\text{Khi đó, } g(x) = \frac{(x^2-4)(x-2)}{a(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{1}{a(x+2)}.$$

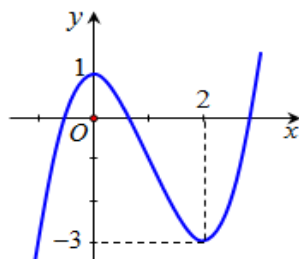
Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a(x+2)} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a(x+2)} = 0$, nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{a(x+2)} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{a(x+2)} = +\infty$, nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x)+3f(x)]} \text{ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?}$$



Lời giải

ĐS: 4

ĐK xác định của $\sqrt{2-x}$ là $x \leq 2$ (*).

$$\text{Ta có } (x-3)[f^2(x)+3f(x)]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ f(x)=0 \\ f(x)=-3 \end{cases}.$$

* Ta có $x=3$ không thỏa mãn

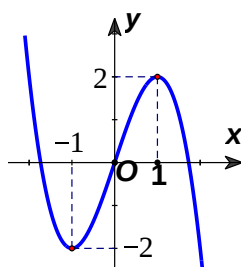
$$* f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a < 0 \\ x=b \in (0;2). \text{ Ta có } x=c \text{ không thỏa mãn} \\ x=c > 2 \end{cases}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = +\infty$. Vậy $x=a$; $x=b$ là các đường tiệm cận đứng.

$$* f(x)=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=d < 0 \\ x=2 \end{cases}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow d^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$. Vậy $x=d$; $x=2$ là các đường tiệm cận đứng.

Câu 30: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^2 - 5x + 4)}$

Lời giải

ĐS: 6

Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3 do đó

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 < -\frac{3}{2} \\ x=x_2=0 \\ x=x_3 > \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = x_1 (1) \\ x^2 - 5x + 4 = x_2 (2) \\ x^2 - 5x + 4 = x_3 (3) \end{cases}$$

Xét phương trình $x^2 - 5x + 4 = a$ có nghiệm khi $a \geq \frac{-9}{4}$. Từ đó suy ra phương trình (1),

phương trình (2) và phương trình (3) đều có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{f(x^2 - 5x + 4)} \text{ có 6 đường tiệm cận đứng.}$$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$  $-\infty$	2  $-\infty$	1  -1	 1	

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4f(x) - 3}$ là

Lời giải

ĐS: 6

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $4f(x) - 3 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa

$$x_1 \in (-\infty; -1), x_2 \in (-1; 0), x_3 \in (0; 1), x_4 \in (1; +\infty). \text{ Suy ra đồ thị hàm số } y = \frac{1}{4f(x) - 3} \text{ có 4}$$

tiệm cận đứng là $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4f(x) - 3} = 0 \text{ nên } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = \frac{1}{4f(x) - 3}.$$

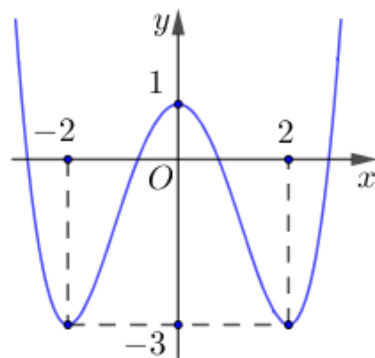
$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4f(x) - 3} = 1 \text{ nên } y = 1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = \frac{1}{4f(x) - 3}.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4f(x) - 3}$ có 2 tiệm cận ngang là $y = 0, y = 1$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4f(x) - 3}$ là 6.

Câu 32: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

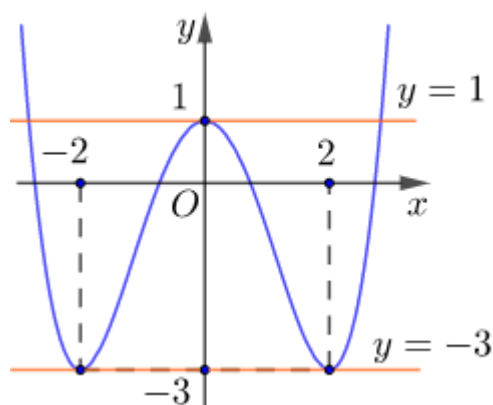
$$y = \frac{x^3 - 4x}{(f(x))^2 + 2f(x) - 3} \text{ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?}$$



Lời giải

ĐS: 5

Xét phương trình $(f(x))^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases}$.



Quan sát đồ thị, ta có:

+) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm u, (-u < -2 < 2 < u) \end{cases}$.

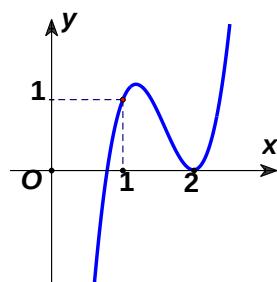
+) $f(x) = -3 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Xét phương trình $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 đường tiệm cận đứng.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x - 1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

ĐS: 4

$$\text{Ta có } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f^2(x) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

$x = 0$ loại do điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$

$f(x) = 0$ cho nghiệm $x = a > \frac{1}{2}$; $x = 2$ là nghiệm kép

$f(x) = 1$ cho ba nghiệm đơn $x = 1$; $x = b$; $x = c$

Khi đó có thể viết mẫu thành $x(x-a)(x-b)(x-1)(x-c)(x-2)^2 \cdot g(x)$ trong đó $g(x)$ vô nghiệm; tử phân tích thành $(x-1)(x-2)\sqrt{2x-1}$.

$$\text{Suy ra } g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x(x-a)(x-b)(x-c)(x-2) \cdot g(x)}$$

Ta dễ dàng kiểm tra được hàm số có 4 tiệm cận đứng là $x = a$; $x = b$; $x = c$; $x = 2$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -3$	$\nearrow 1$	$\searrow -\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

Lời giải

ĐS: 5

+ Mẫu của $g(x)$ là một đa thức bậc 8 nên $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}} g(x) = 0$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm

số $g(x)$ là đường thẳng $y = 0$.

$$+ f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = a, (a < -\sqrt{2}) \\ x = b, (b > \sqrt{2}) \end{cases} \quad \text{do đó}$$

$$g(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{f^2(x) + 2f(x) - 3} = \frac{x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{x^2(x + \sqrt{2})^2(x - \sqrt{2})^2(x - a)(x - b)} \quad \text{nên}$$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - a)(x - b)} = y_0 \in \mathbb{R}$ nên đường thẳng $x = 0$ **không phải** là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

ii) $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^+} \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - a)(x - b)} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

iii) $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - a)(x - b)} = -\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

iv) $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - a)(x - b)} = -\infty$ nên đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

v) $\lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - a)(x - b)} = +\infty$ nên đường thẳng $x = b$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có **5 đường tiệm cận**.

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^4 - (3m+2)x^2 + 3m+1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận?

Lời giải

ĐS: 2019

Hàm số đã cho xác định khi: $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x^2 \neq 3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x^2 \neq 3m+1 \end{cases}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có một TCN là đường thẳng $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận khi nó có 4 đường TCD $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 = 3m+1$ có

hai nghiệm phân biệt khác $\pm 1, -3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m+1 \neq 1 \\ 3m+1 \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \\ m \neq \frac{8}{3} \end{cases}$.

Suy ra số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận là 2019.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị của m để hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x-m}$ tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2022.

Lời giải

ĐS: 2

Đề đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{m-x}$ có hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -2$ và tiệm cận đứng là $x = m$.

$\Rightarrow$ Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có kích thước là 2 và $|m|$.

$\Rightarrow$ Đề hình chữ nhật tạo thành có diện tích bằng 2022 $\Leftrightarrow 2 \cdot |m| = 2022$
 $\Leftrightarrow |m| = 1011 \Leftrightarrow m = \pm 1011$.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a + 2b$ bằng

Lời giải

ĐS: 8

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$. Khi đó:

+) Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận ngang là: $|b-2| = \left| \frac{2a-1}{a-1} - 2 \right| = \frac{1}{|a-1|}$;

+) Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận đứng là: $|a-1|$.

Ta có $|a-1| + \frac{1}{|a-1|} \geq 2\sqrt{|a-1| \cdot \frac{1}{|a-1|}} = 2$. Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi

$|a-1| = \frac{1}{|a-1|} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0(l) \\ a=2 \end{cases}$. Suy ra $b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8$.